



UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. General Part-II Examination, 2020

MATHEMATICS

PAPER-IV (New Syllabus)

Time Allotted: 1 Hour

Full Marks: 25

*The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.*

GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

Answer Question Nos. 1 and 2, and any *one* from the rest (i.e., from Question Nos. 3 to 5)

১ এবং ২ নং প্রশ্নের উত্তর দাও এবং বাকী অংশ থেকে যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দাও (অর্থাৎ ৩ থেকে ৫ নং প্রশ্ন হইতে)

প্রশ্ন ন. ১, ২ অনি রহলবাট কুনৈ একবটা প্রশ্নকা উত্তর দেऊ (অর্থাৎ প্রশ্ন সংখ্যা ৩ সে ৫)

1. Answer any *one* question:

2×1 = 2

যে-কোন একটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কুনৈ একবটা প্রশ্নকা উত্তর দেऊ:

(a) Evaluate $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-2x)\sqrt{1-x^2}}$.

মান নির্ণয় করঃ $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-2x)\sqrt{1-x^2}}$.

$\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-2x)\sqrt{1-x^2}}$ কো মান নির্ণয় কর।

(b) Show that $\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \cos^3 \theta d\theta = \frac{2}{63}$.

প্রমাণ করঃ $\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \cos^3 \theta d\theta = \frac{2}{63}$.

প্রমাণ কর : $\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta \cos^3 \theta d\theta = \frac{2}{63}$

(c) If $f(x) = f(a+x)$, then find the value of k from the following:

যদি $f(x) = f(a+x)$ হয়, তাহলে নিম্নলিখিত সমীকরণ থেকে k -এর মান নির্ণয় করঃ

$$\int_0^{4a} f(x) dx = k \int_0^a f(x) dx$$

যদি $f(x) = f(a+x)$ মপ $\int_0^{4a} f(x) dx = k \int_0^a f(x) dx$ বাট k কো মান নির্ণয় কর।

2. Evaluate any **one** :

যে-কোন **একটির** মান নির্ণয় করঃ

कुनै **एकवटाको** मान निर्णय गरः

(a) $\int_2^e \left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2} \right] dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos \alpha + \cos x}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n^2 - 1^2}}{n} + \dots + \frac{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}}{n^2} \right]$

3. (a) Evaluate: $\int_0^1 \int_0^{1-y^2} [(x-1)^2 + y^2] dx dy$

4

মান নির্ণয় করঃ $\int_0^1 \int_0^{1-y^2} [(x-1)^2 + y^2] dx dy$

মান নির্ণয় गर : $\int_0^1 \int_0^{1-y^2} [(x-1)^2 + y^2] dx dy$

(b) Find the volume of the solid generated by revolving the cardioide $r = a(1 - \cos \theta)$ about its initial line.

4

Cardioide $r = a(1 - \cos \theta)$ -টি তার প্রাথমিক রেখা (initial line)-র সাপেক্ষে ঘূর্ণনের ফলে উৎপন্ন ঘন বস্তুটির আয়তন নির্ণয় কর।

शुरुको रेखा (initial line) को सापेक्षमा Cardioide $r = a(1 - \cos \theta)$ लाई घुमाउँदा उत्पन्न हुने ठोसको आयतन निर्णय गर।

(c) Test the convergence of $\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$.

2

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$ -এর অভিসৃতি যাচাই কর।

$\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$ को अभिकेन्द्रनको जाँच गर।

4. (a) Find a reduction formula for $\int \tan^n x dx$. Hence evaluate $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx$.

4

$\int \tan^n x dx$ -এর মান নির্ণায়ক ক্রম সূত্রটি বাহির কর। সেখান থেকে $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx$ -এর মান নির্ণয় কর।

$\int \tan^n x dx$ को reduction formula निर्णय गर साथै $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx$ को मान निर्णय गर।

(b) Show that $\beta(m+1, n) = \frac{m}{m+n} \beta(m, n)$. 3

দেখাও যে, $\beta(m+1, n) = \frac{m}{m+n} \beta(m, n)$.

প্রমাণ কর : $\beta(m+1, n) = \frac{m}{m+n} \beta(m, n)$

(c) Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, if exists. 3

মান নির্ণয় করঃ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, যদি এর অস্তিত্ব থাকে।

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ মান পাউন্ট মনে নির্ণয় কর।

5. (a) Show that $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)}{n(n+1) \cdots (n+m-1)}$ 5

Where m is a positive integer and n any positive quantity.

দেখাও যে, $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)}{n(n+1) \cdots (n+m-1)}$

যেখানে m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং n যে - কোন ধনাত্মক সংখ্যা।

m যদি এতটা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা অনি n হাে প্রমাণ কর :

$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)}{n(n+1) \cdots (n+m-1)}$

(b) Find the length of one arc of the cycloid $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$. 5

বৃত্তজাত চক্র (Cycloid) $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ টির একটি বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

Cycloid $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ কো এতটা চাপকো লমাই নির্ণয় কর।

GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

6. (a) Obtain the differential equation of all circles each of which touches the axis of x at the origin. 3

x অক্ষেরখাকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করেছে এমন সব বৃত্তগুলির অবকল সমীকরণ নির্ণয় কর।

x অক্ষলাই মূলবিন্দুমা স্পর্শা গর্নে সম্পূর্ণ বৃত্তহরুকো অবকল সমীকরণ নির্ণয় কর।

(b) Determine the order and degree of $\left(\frac{d^2y}{dx^2} + y\right)^{5/2} = \left(y^2 + 2\frac{dy}{dx}\right)^{2/3}$. 2

$\left(\frac{d^2y}{dx^2} + y\right)^{5/2} = \left(y^2 + 2\frac{dy}{dx}\right)^{2/3}$ -এর ক্রম এবং মাত্রা নির্ণয় কর।

$\left(\frac{d^2y}{dx^2} + y\right)^{5/2} = \left(y^2 + 2\frac{dy}{dx}\right)^{2/3}$ কো শ্রেণী অনি বর্গ নির্ণয় কর।

7. Answer any **one** question:

যে-কোন **একটি** প্রশ্নের উত্তর দাও:

कुनै एकवटा प्रश्नका उत्तर देऊ:

(a) Solve: $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$

সমাধান করঃ $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$

সমাধান গর : $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$

(b) Solve: $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = 6x^5$

সমাধান করঃ $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = 6x^5$

সমাধান গর : $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = 6x^5$

(c) Solve: $\frac{d^2y}{dx^2} - 7 \frac{dy}{dx} - 18y = x^2 e^{-2x}$

সমাধান করঃ $\frac{d^2y}{dx^2} - 7 \frac{dy}{dx} - 18y = x^2 e^{-2x}$

সমাধান গর : $\frac{d^2y}{dx^2} - 7 \frac{dy}{dx} - 18y = x^2 e^{-2x}$

(d) Reduce the equation $x^3 p^2 + x^2 yp + a^3 = 0$ to Clairaut's form by the substitution

$y = u, x = \frac{1}{v}$ and then solve it.

$y = u, x = \frac{1}{v}$ প্রতিস্থাপন করে $x^3 p^2 + x^2 yp + a^3 = 0$ সমীকরণটিকে Clairaut's রূপে পরিবর্তিত কর এবং তার সমাধান কর।

$y = u, x = \frac{1}{v}$ को प्रतिस्थापनाद्वारा $x^3 p^2 + x^2 yp + a^3 = 0$ लाई Clairaut's रूपमा परिणत गरेर समाधान गर।

(e) Find the orthogonal trajectories of $(x-1)^2 + y^2 + 2ax = 0$.

$(x-1)^2 + y^2 + 2ax = 0$ -এর Orthogonal Trajectories নির্ণয় কর।

$(x-1)^2 + y^2 + 2ax = 0$ को लम्बकोणीय समच्छेदीहरू निर्णय गर।

—×—